第一章

1.1（a）由于

（b）

1.2 证明：（a）由于F连续且递增，则有其逆函数，记为,则

由均匀分布定义，即证。

（b）对于所有的x,有，即证。

1.3证明：令 ，则,



 



则，得证。

1.4由于，则

1.5 （a） 的联合分布为

,其中,且。

（b）,

,,,

（c）令

,

不出现的结果数,

,

1.6 (a)令，则相互独立且。





(b) 在时刻未出现记录中最大值





(c) 为大于的首次记录值的时刻，为在时刻的记录值。



与无关，则与独立。

1.7令表示第i次选取的是白球，表示第次选取的是黑球，则,对于任意的，有，，，

1.8 （a）令，事件是,的并，由独立性知

所以，服从参数为的Poisson分布。

（b）由于，所以

即在的条件下，服从参数为的二项分布。

1.9证明：考虑一次比赛结果，设Y是结果中Hamilton排列的个数，将任意排列，共有个排列，令为：

则，。

得证。

1.10假设每次比赛的结果是独立的，每个参赛人以1/2概率赢。对k个参赛人的任意集合S，令A（S）是没有的成员打败S中每个人这一事件。那么

其中等式来自，存在个规模为k的集合，而是不在S中的n-k个参赛人的每人与S中参赛人的k次比赛至少输一次的概率。因此，若，则存在一个正的概率使所有的事件都不出现。

1.11 （a）

令z=0，有

（b）

所以，

（c）由于，所以

所以，

（d）由于，

所以，

（e）由于,

所以，

（f）由于，

所以，

1.12 证明：

因此。

令，，则。

1.13 （a）设这k张牌分别为(按设置时间顺序)，集合，设有两种排列，其的位置仅有一处不同，不妨设位置不同，情况1是在上，情况2是在上，则，即两种情况等可能.由于所有的排列均可经有限多对互换得到，故原命题成立.

（b）由（a）知，在某时有张牌在一轮开始时最后一张牌下面的顺序有种等可能情况，下一轮开始时最后一张牌标记等可能有种，则，得证.

（c）设表示到张牌进行的抽牌次数，

,,,设为洗牌次数，则

1.14 （a）令表示第个和第个偶数之间出现的1的个数，由取条件于1先于偶数出现或偶数先于1出现，有

所以有，因为，有

（b）以表示第个和第个偶数之间出现2的个数，那么

那么有

（c）由于1或者偶数出现的概率为，

是的负二项分布的随机变量，所以

（d）有10个结果为偶数，出现2的概率为,所以是的二项分布的随机变量，

1.15（1）证明：

可得是的分布函数。

（2）证明：

可得是均值为1的指数分布。

1.16（a）假设有密度函数，令，是一列独立的随机变量，。在第n次迭代中，满足条件，算法终止，则具有密度函数。

（b），设生成X必须迭代的次数为N，，

1.17 （a）令

（b）令

1.18 解：设连续出现个正面时投掷次数的期望值为，在连续出现次正面后下一次投掷为正面，仍需投掷0次；下一次投掷为反面，出现连续次正面还需投掷次数的期望为。由此：

由上式可得。

1.20 （a）令L表示第1个区间的左端点，时显然成立，当时，

1.21 证明：成立。

设

则

得证。

1.22

所以，

1.23 （a）令表示由i迟早到达j，表示由i移向j

（b）求解，得或，根据条件，有，如果。对于，由强大数定律知，粒子会以概率1到达负无穷，如果，则会以概率1到达1，违背了强大数定律，即证。

（c）

（d）

1.24（a）证明：记质点从0出发首次到达1的时间为T。设为从点出发首次到达点的时间，易得：独立同分布，。

记X为1时刻质点所在位置。

由上式可得：

（b）不会

（c）解：

（d）解：

1.27 解：赌徒破产前赌次的概率可以看做在赌次后首次出现输的次数比赢的次数多n次的概率，即：

（a）前n+2i次中i次赢，n+i次输；

（b）前n+2i次中，输的次数绝不比赢的次数多n次。可理解为从最后一次出发反向进行时，i次赢和n+i次输的出现次序满足输的次数总大于赢的次数，利用投票问题可知：

则

1.28 指数随机变量的矩母函数为，，

E，

1.29指数分布的矩母函数为，由于独立

所以服从参数为的gamma分布。

1.30 解：设正在为B服务的办事员服务时间是速率的指数分布，正在为C服务的办事员服务时间是速率的指数分布。

1.31

1.32由于，下由数学归纳法证明（n为正整数），当时显然成立，假设当时成立，则当时，有

即当时成立，即有。

所以对任意的有理数，有，是常数，所以对于有理数都有。

对于任意无理数，必可找到一个以它为极限的有理数列，即，而，两边取极限并利用函数连续性有，即对于任意无理数都有，即证。

1.34

因为，，，，

所以

1.35（a）由得到，推出，所以

（b）

要证，只需要证，只需要，只需要证

由于，所以，即证

（c）假设

因为，有，令，，从而，则当时，，因为，且是一个凸函数，则时，

1.36证明：对不等式两边取对数：

令，。

，则是区间上的严格凸函数。

由Jessen不等式：

得证。

1.39 解：记是从到的步数，由提示，

由此递推式可得

则。

随机过程第二章课后题答案

2.1 证：





2.2 证：（a）

（b），，，，由，得

所以，，

（c），，令，，则

2.3 证明：

2.4 解：



2.5 解：令，满足

1. 和有独立增量，并且和独立，所以是独立增量过程。
2. 对于任意的，

所以，是速率为的Poisson过程。

令X是中首个事件发生的时间，和分别是和中首次发生事件的时间，则

2.6 解：N表示机器停止运转时失效部件总数，为总失效率，即单位时间内失效部件数，则运转平均时间长度为：。

当i>k-1时，。

2.7 解：由于等价于，由此推出的联合分布为

，

即：



2.8 （a）

（b） 以记Poisson过程的到达间隔时间，则直至时刻1为止的事件数

等于满足

的n，或等价于满足

的n，或等价于

或

现在，结果得自是均值为1的Poisson随机变量。

2.9 解：(a)在时刻s后发生首个事件的时刻停止，则

(b)

(c)

2.10 证明：（a）设为从到达公交站到公交车到达的时间，为从到达车站时直到家的时间. 由于指数分布的无记忆性，服从参数为的指数分布，则



所以



（b）



则



2.11 解：令W为等待时间，X为汽车首次到达时间

所以，

2.12 (a)解：

时，，满足上式。

(b)解：

后面没做出来

2.13 解：由题可知：服从参数为的指数分布，服从参数为的几何分布，服从参数为的伽马分布，从而





2.14 解：（a）令 表示从i层进j层出的人数。

（b）

所以，服从参数为的Poisson分布。

（c）由于和独立，所以

2.15 解：(a) 服从参数为的二项分布。

(b),不独立。

(c) 设为t时刻投掷的次数，为t时刻投掷出面i的次数，相当于将Poisson过程分解为，由题2.20可知：独立服从于参数为的Poisson分布。

易得：

由此可得：.

(d) 由独立，独立。

(e)由T定义及独立性可得：

(f)为第i次投掷与第i-1次投掷的间隔时间，则

2.16 解：固定，令

由命题2.3.2，个结果数相互独立，所以是独立的，.

所以，

由于服从参数为的泊松分布，







2.17 解：（a）

（b）至少i个

（c）

（d）

令y代替有

（e）由于，当时，

当时，由无记忆性

2.18 证明：的联合概率密度函数为：

2.19 解：（a）由系统，在中载有个顾客离开系统的公交车数服从均值为的泊松分布，所以在离开系统的公交车总数服从均值为的泊松分布，.

（b）否.

2.20 解：令，给定时，到达时间服从0到t的均匀分布，且相互独立

即是独立的，且服从均值为的Poisson分布。

2.22 若进入的一辆车在时刻处在和之间，则我们称它为型的. 因此，在时刻进入的一辆车，若其速度满足，则它是型的. 故而它是型的概率是

.

于是型车数是Poisson过程，其均值为

.

2.24 证明：设t时刻进入公路的车速度为v，在公路中行驶时间为。任意时刻s进入公路的车速度，设在公路中行驶时间，则

若s<t，则两辆车相遇的概率为；若s>t，则两车相遇概率为。将两车相遇概率记为

可看作Poisson过程的分解，以概率P(s)将事件分为一型，则与t时刻进入公路车辆相遇的车辆数是参数为

的Poisson随机过程。由

时，，。则，即使相遇次数最小的车速是分布F的中位数。

2.25 设是发生在中任意时刻的事件的贡献量，为事件的发生时刻，



设是发生在任意时刻事件的贡献量，是来自的样本，则，，.

2.29 解：记

当时，

所以，

所以，

所以，

当时，

所以，

设的特征函数为

所以，

所以，

所以，

所以，

2.30 (a)

不独立。

(c)

(d)

(b)不同分布。

2.31 证明：是严格连续增函数，为的反函数.

（1）

（2）对于，，由于与不重叠，与是独立的，所以具有独立增量性.

（3）对于，



综上，为参数的Poisson过程.

2.32 解：（a）由2.31，假设连续并且严格增，令，且是速率为的Poisson过程，令表示的无次序到达时间的集合，有，在给定时服从，所以

（b）类似于排队系统问题，（0，t）内无工作工人数量的均值满足

令表示t时间内伤员个数，I为一个伤员在时间t内无工作的示性函数，V是事故发生时间。

，且服从二项分布，所以

所以，

2.33 (a)固定点记为点O，令为以O为圆心，t为半径的圆内发生事件数，由题意，.

(b)

(c)令为以O为圆心，面积为s的圆内发生事件数，则。由题意，与独立，且.

2.35 解：（a）不是，因为事件发生的数量在一些区间上收到t的影响。

（b）是，因为在任意不交区间中发生的事件数目是独立的。

2.36 解：

其中为G与其自身的n次卷积。

2.39 解：不妨设t<s,

2.41 解：（a）没有独立增量，因为在任意区间中事件数的信息会改变的分布。

（b）知道等价于知道和到达时刻，现在对

因此，

因此的条件分布只依赖，因为在给定的值时，无论的值是什么，都是同分布的。

（c）

（d）

（e）同分布但是不独立。

随机过程第三章课后题答案

3.1 解：（a）正确

（b）不正确

（c）不正确

3.2解：

3.3 为t时刻之前最后一次更新与t时刻之后第一次更新区间长度，即包含时刻t的更新区间长度。计算，对取条件：

3.4 证明：





3.6 证明：由习题2.3 , 时，.

容易看出为一个常数，记为c，则。由3.5，由m(t)形式可得为Poisson过程。

3.7 证明：



对上述方程求微分



令，我们得到









由于，我们有，所以得到

，

因为在时刻1后首次更新的时刻，是直至和超过1需要增加的到达间隔数，由此推出需要加起来超过1的均匀随机变量的期望个数是

3.8解：（a）

改变积分顺序，由Fubini定理，通过变换不改变积分值。

（b），由（a）中可交换性，有，即证。

（c）

3.9 解：可将顾客进入银行的过程看作一个交替更新过程。初始时刻服务员空闲，经过第一个闲期 后顾客到来进入忙期，服务时间 后再次进入闲期。如此继续下去。更新过程的间隔时间为。

，则。

忙期长度，设。

(a)，则顾客进银行的速率为。

(b) 潜在顾客人数为时间内到达银行的顾客数，其中只有一人进银行。

则潜在顾客中进银行的占比例为。

(c) 服务员的忙期占时间比例为：

3.10 解：

（a）



（b）





从而



（c）



3.11解：（a）是选择i号门之后要花费的时间，N为直到他脱险选择的次数。

（b），，，

（c）

（d）

3.12 证明：取。由于，可取t充分大，使 ，

由关键更新定理的结论：

3.13 解：由于状态是循环的，所以定义在状态是开，在状态是关，，则



3.14解：（a）

（b）

（c），x

（d）由于

3.15 (a)

(b) 由(a)：

(c)

(d)

(e)

3.16 证明：





3.17解：

令且利用推出

3.20解：（a）令T表示所求次数，由Blackwell定理

（b）由Blackwell定理，

但HHTT更新过程是普通过程，，HTHT过程是一个延迟更新过程，因此期望次数要大于16。

3.23解：令H表示前k次投掷，表示H中所有可能的集合，令A为k次投掷后追加的投掷，则

3.29解：令L表示一辆小汽车寿命，并且服从分布F

（a）用了A年，那么由以旧换新策略

（b）取条件于车的年龄

同样地，

与（a）相同。

随机过程第四章课后题答案

4.1 解：令表示时间周期n时的随机需求，则是独立的随机变量且与相互独立，

依赖于，故为Markov链。

假定

4.2 证明：

4.3 解：若状态i可达状态j，则存在一条路径。

若路径中有重复状态，则存在更短路径从i可达j。如，则存在路径。

因此存在一条从i可达j的路径，且路径中无任何重复状态。由于状态数为n，状态j在n步或者更少步数内可达。

4.4 证明：令Y表示0时刻从状态i首次经过状态j的时刻

4.5解：

（a）0时刻从状态i开始，n时刻在状态j，并且不经过状态k的概率。

（b）令Y为最后一次离开i的时刻

4.6 解：设质点在平面的整数格点上做随机游动，每次以1/4的概率向邻近的4个状态转移。容易得出平面上的对称随机徘徊是周期为2的马氏链，各状态互通，仅考虑状态0.

因此，状态0是常返态，对称随机徘徊在二维是常返的。

设质点在三维空间中的整数格点上做随机游动，每次以1/6的概率向邻近的6个状态转移。容易得出三维空间中的对称随机徘徊是周期为2的马氏链，各状态互通，仅考虑状态0。

因此，状态0是非常返态，对称随机徘徊在三维空间中是非常返的。

4.7 解：（a）

（b）注意到2n步返回的期望次数等价于由1到n的2k步返回的概率和，所以

（c）如果，有

由Stirling近似

因此

4.8 解：（a）

（b）不是Markov链，是Markov链

（c）若，则第n+1个记录值在时刻j产生，下一个记录值在时刻k产生，k>j的概率为

故是一条Markov链

4.9 证明：

4.10 解：（a）

（b）不是

（c）不是

（d）是，转移概率为

4.11 解：（a）

（b）由于，由（a）即得

4.12 解：该双随机链所有状态都是遍历态，则它是不可约非周期正常返的马氏链，存在平稳分布，且平稳分布就是极限分布。设平稳分布为。

，可得

，

又因为，可得。则极限分布为：

4.13 证明：假设而i是正常返的，令m使，以记这个链第k次处在i的时刻，且令

由强大数定律

因此

其中是两次访问i之间的时间，因此j也是正常返的。若i是零常返的，则因为，而常返是类的性质，j也是常返的。若假设j是常返的，则由上面的论证i将是正常返的，这个矛盾导致j也是零常返的。

4.14 解：假设状态i是零常返的且以C记i所在的互通类，则C中的一切状态都是零常返的蕴含对一切C中j有，但是这与和C是有限集有矛盾，由于相同的原因，在一个有限状态链中，不能一切状态都是暂态的。

4.15 解：

4.16 解：（a）取在她当前所在地点的雨伞数为状态，转移概率是

（b）极限概率方程是

易验证他们满足

其中

（c）

4.17 解：令，则

4.18 解：(a)设 为1天内到达j个工作的概率。则：

(b) 该马氏链所有状态互通，且每个状态都是非周期的。由于不可约有限马氏链只有正常返态，该马氏链是遍历链。

(c) 平稳分布满足，即：

4.19 解：（a）从状态i到状态j

（b）从A中一个状态到中一个状态

（c）由于任意两个从A中一个状态到中一个状态的转移中，必定会有一个从中一个状态转移到A中一个状态的转移，反之亦然。

（d）由（c）知从A中一个状态到中一个状态的极限转移概率等价于从中一个状态转移到A中一个状态的极限转移概率，即证。

4.20 解：若从状态i出发的第n次转移是进入状态j，则令等于1，否则令它为0。再者，以记这个链在回到0以前处在状态i的时间单位数，则对j>0有

但是由Wald方程

对于第二个证明，注意将访问状态0看做循环，由此推出处在状态j的时间的长程比例满足

因此我们由平稳方程得到，对j>0有

4.21 解：设，由题目，该马氏链的转移矩阵如下：

该马氏链所有状态为正常返态等价于存在平稳分布满足，且即

存在解满足，且。上式等价于：

可得：

，且,则使马氏链正常返的充要条件是：

且极限分布为:

4.23 证明：根据例子4.4(a)，

如果p≠1/2，所求概率 =

如果p=1/2，所求概率 =

4.30 解：。只考虑时的，可将看作以概率p向正向走，q=1-p向负向走的简单随机徘徊。

N是停时，由Wald方程可得：

4.31 解：令状态0为蜘蛛和苍蝇在同一个位置，状态1为蜘蛛在位置1而苍蝇在位置2，状态2为蜘蛛在位置2而苍蝇在位置1.



（a）



（b）因为N服从参数几何分布，所以

4.32 证明：(1)吸收的概率为1，令是当马尔可夫链从状态n开始时的吸收的概率,，，对于

所以

由于，所以

所以

由递推，

令 和

由于 ,

得到

所以 ,

(2)令 是当马尔可夫链从状态n开始时的吸收的步数，.

显然 对于

因为

由递推，

令

令

因为

所以

,

因为 满足上面的递推公式（对），所以

4.33 解：(a)，则0是常返态；若，则,其他有限状态都是瞬时态。任意瞬时态只能有限次地被访问，因此或区域0，或区域无穷大。

(b)

4.34 解：(a)如果，注定灭绝。考虑，令是后代数量分布，

灭绝概率

令

令

令;令

灭绝概率=

(b)令是第1代的后代的数量，令是第2代的后代的数量.

(c)对于灭绝概率是

4.35 解：

(a)

所以

令

当时，单调递增；当时，单调递减，

所以 至多有两个解，一个大于1，一个小于1。显然一个解是，所以另一个解是.

由于所以小于1的解是，即

4.39 解：设

4.41 解：(a) 显然

(b)由于，所以当时，不是time reversible，当时，是time reversible。

4.42 解：显然vertice数量.因为，所以此马尔可夫链是不可约的。所以它符合命题4.7.1的条件，所以它time reversible。

因为，所以

令则以此类推，

所以

,

4.44 解：由于原马尔可夫链time reversible，所以由于 所以

题目里假设所以

下面证明是平稳分布。显然，还要证明，即

由于是原马尔可夫链的平稳分布，所以，第k列满足 即.